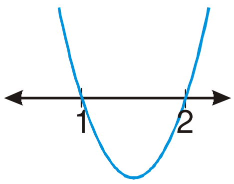
11.2.14 Nerovnice

Předpoklady:

Shrnutí nerovnic:

- Při úpravách nerovnic postupujeme velmi podobně jako při úpravách rovnic, ale
  - Při násobení nerovnice záporným číslem obracíme znaménko nerovnice (protože $\begin{array}{l} 1<2 \quad / \cdot(-1) \\ -1>-2 \end{array}$)
    - Proto při násobení nerovnice výrazem s neznámou, musíme řešit znaménko výrazu a většinou dělit výpočet do více větví. Snažíme se tomu vyhnout (a v příkladech ve státní maturitě se příklady, kde se tomu vyhnout nedá, nevyskytují).
    - Umocňování nerovnic je ještě riskantnější.
- Kvadratická nerovnice $x^2-3x+2>0$:
  - Najdeme kořeny: $x^2-3x+2=(x-2)(x-1) \Rightarrow x_1=2, x_2=1$,
  - Nakreslíme obrázek:



  - Napíšeme řešení: $K=(-\infty;1)\cup(2;\infty)$.
- Výrazy typu $(x-2)^2$ jsou vždy nezáporné $\Rightarrow$ při řešení nerovnic v součinovém tvaru s nulovou pravou stranou je můžeme vynechávat.
- Nerovnice v součinovém tvaru s nulovou stranou typu $\frac{x-2}{x+3}<0$ můžeme převést na ekvivalentní nerovnici bez jmenovatele $(x-2)(x+3)<0$.
- Čísla vyloučená podmínkou nemohou být součástí množiny všech řešení nerovnice.

Př. 1: V oboru R řeš nerovnici a množinu všech řešení zapiš intervalem.

$$\frac{18-3x}{-3}+2<0$$

1 bod

$$\frac{18-3x}{-3}+2<0$$

$$\frac{-3(-6+x)}{-3}+2<0$$

$$-6+x+2<0 \qquad /+4$$

$$x<4 \;\Rightarrow\; K=(-\infty;4)$$

Dodatek: K řešení je možné se dostat i „bezpečněji“ postupným upravováním:

$$\frac{18-3x}{-3}<-2 \qquad /\cdot(-3)$$

$$18-3x<6 \quad /+3x-6$$
$$12<3x \quad /:3$$
$$4>x$$

Př. 2: Pro kterou z následujících nerovnic je množinou řešení množina všech reálných čísel *R*? A) $\frac{6^2 \cdot x^2}{6 \cdot x}>0$ B) $\frac{6^2-x}{x-6^2}<0$ C) $(x-6)^2 \geq 0$ D) $x^2+6^2 \leq 0$ E) $x-6^2>x+6^2$ **2 body**

Řešíme jednotlivé nerovnice:

A) $\frac{6^2 \cdot x^2}{6 \cdot x}>0$, Podmínky: $x \neq 0 \Rightarrow$ řešením nemůže být množina *R*.

B) $\frac{6^2-x}{x-6^2}<0$, Podmínky: $x \neq 6^2 \Rightarrow$ řešením nemůže být množina *R*.

C) $(x-6)^2 \geq 0$, bez podmínek, levou stranu nerovnice tvoří druhá mocnina čísla $(x-6)$, která vždy nezáporná a tedy $\geq 0 \Rightarrow K=R$, C) je správná odpověď.

Pro kontrolu projdeme další body.

D) $x^2+6^2 \leq 0 \quad /-6^2$

$x^2 \leq -6^2=-36$, druhá mocnina reálného čísla je nezáporná $\Rightarrow$ řešením je prázdná množina.

E) $x-6^2>x+6^2 \quad /-x+6^2$

$x-x>6^2+6^2$

$0x>72 \Rightarrow K=\emptyset$

Správná odpověď: C).

Př. 3: Přiřaď ke každé nerovnici (1.–4.) množinu všech jejích řešení (A-F) v oboru *R*.

1. $(x-1)(x+4)>0$
2. $\frac{(x+4)}{1-x}>0$
3. $\frac{(x-1)^2}{(x+4)}>0$
4. $\frac{(x-1)(x+4)}{1-x}>0$

A) $(-\infty;-4)\cup(1;\infty)$ B) $(-\infty;-4)$ C) $(-4;\infty)$

D) $(-4;1)$ E) $(-1;4)$ F) jiná množina

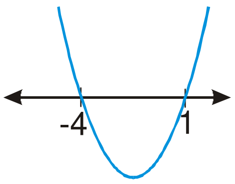
max 4 body

Řešíme jednotlivé nerovnice.

1. $(x-1)(x+4)>0$

Kvadratická nerovnice: průsečíky s osou *x*: $(x-1) \Rightarrow x_1=1$, $(x+4) \Rightarrow x_2=-4$

Před x^2 není mínus $\Rightarrow$ funkce má tvar „ďolíku“



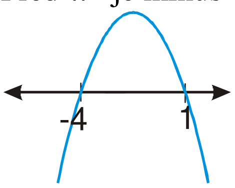
$K=(-\infty;-4)\cup(1;\infty)$, možnost A).

2. $\dfrac{(x+4)}{1-x}>0$

Ekvivalentní nerovnice (stejné členy, bez zlomku): $(x+4)(1-x)=-(x+4)(x-1)>0$

průsečíky s osou x: $(x-1)\Rightarrow x_1=1$, $(x+4)\Rightarrow x_2=-4$

Před x^2 je mínus $\Rightarrow$ funkce má tvar „kopečku"



$K=(-4;1)$, možnost D).

3. $\dfrac{(x-1)^2}{(x+4)}=(x-1)^2\cdot\dfrac{1}{(x+4)}>0$

První člen je ≥ 0 (druhá mocnina), řešíme jen druhý člen, který rozhoduje o znaménku levé strany: $\dfrac{1}{(x+4)}>0 \;\Rightarrow\; x+4>0 \Rightarrow x>-4 \;\Rightarrow\; K=(-4;\infty)$, možnost C).

4. $\dfrac{(x-1)(x+4)}{1-x}=\dfrac{(x-1)}{-(x-1)}\cdot(x+4)=-(x+4)>0 \;\Rightarrow\; x+4<0 \quad /-4$

$x<-4 \;\Rightarrow\; K=(-\infty;-4)$, možnost B)

Celkové řešení: 1 A), 2 D), 3C), 4B).

Př. 4: V oboru R řeš: $\dfrac{2x-x^2}{x}\geq 0$. **1 bod**

$\dfrac{2x-x^2}{x}\geq 0$, Podmínky: $x\neq 0$.

$\dfrac{2x-x^2}{x}=\dfrac{x(2-x)}{x}=2-x\geq 0 \qquad /+x$

$x\geq 2 \;\Rightarrow\; K=(-\infty;2\rangle-\{0\}$

$K=(-\infty;0)\cup(0;2\rangle$

Př. 5: Je dán výraz $\frac{2-x}{x-4}+1$. Urči všechna $x \in R$, pro která je hodnota daného výrazu kladná. V záznamovém archu uveď celý postup řešení. **Max. 2 body**

Hodnota výrazu $\frac{2-x}{x-4}+1$ má být kladná $\Rightarrow$ řešíme nerovnici: $\frac{2-x}{x-4}+1>0$

$\frac{2-x}{x-4}+1=\frac{2-x}{x-4}+\frac{x-4}{x-4}=\frac{2-x+x-4}{x-4}=\frac{-2}{x-4}>0$

$\frac{-2}{x-4}>0 \qquad / >(-2)$

$\frac{1}{x-4}<0 \Rightarrow (x-4)<0 \Rightarrow x<4 \Rightarrow K=(-\infty;4)$

Dodatek: Z návodu pro hodnocení: 1 bod pouze při zapsání nadbytečné informace, která neovlivní množinu řešení, po správné dořešení nerovnice následuje chybný zápis množiny řešení, nebo chybně provedený početní úkon s čísly.

Př. 6: Pro kterou z následujících nerovnic je množinou všech řešení v oboru R interval $(-2;3)$? **2 body**

A) $\frac{x-3}{x^2+2}<0$ B) $(x-2)(x+3)<0$ C) $(x+2)(3-x)<0$

D) $\frac{x-3}{x+2}<0$ E) $\frac{x^2+3}{x-2}<0$

Řeším jednotlivé nerovnice.

A) $\frac{x-3}{x^2+2}<0$

Jmenovatel x^2+3 je vždy kladné číslo $\Rightarrow$ řešíme nerovnici $x-3<0$ $\Rightarrow$ řešíme je interval od $-\infty$ $\Rightarrow$ nejde o správnou možnost.

B) $(x-2)(x+3)<0$

Kvadratická nerovnice: průsečíky s osou *x*: $(x-2)\Rightarrow x_1=2$, $(x+3)\Rightarrow x_2=-3$ $\Rightarrow$ řešením budou intervaly s hranami v číslech –3 a 2 $\Rightarrow$ nejde o správnou možnost.

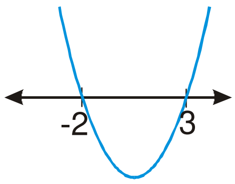
C) $(x+2)(3-x)=-(x+2)(x-3)<0$

Kvadratická nerovnice: průsečíky s osou *x*: $(x+2)\Rightarrow x_1=-2$, $(x-3)\Rightarrow x_2=3$ $\Rightarrow$ řešením budou intervaly s hranami v číslech –3 a 2 $\Rightarrow$ nejde o správnou možnost.

D) $\frac{x-3}{x+2}<0$, ekvivalentní nerovnice (stejné členy, bez zlomku) $(x-3)(x+2)<0$.

Kvadratická nerovnice: průsečíky s osou *x*: $(x-3)\Rightarrow x_1=3$, $(x+2)\Rightarrow x_2=-2$

Před x^2 není mínus $\Rightarrow$ funkce má tvar „důlíku“



$K = (-2; 3) \Rightarrow$ správná možnost

Jen pro jistotu prohlédneme ještě poslední bod.

E) $\frac{x^2+3}{x-2} < 0$

Čitatel x^2+3 je vždy kladné číslo $\Rightarrow$ řešíme nerovnici $\frac{1}{x-2} < 0 \Rightarrow$ řešíím je interval od $-\infty \Rightarrow$ nejde o správnou možnost.

Správná možnost D).

Př. 7: Ke každé nerovnici (1. – 3.) řešené v oboru R přiřaď odpovídající množinu všech řešení (A-E).

1. $-x^2 \geq 0$ 2. $3x \leq (-3)^2 - 3\cdot 3$ 3. $\frac{6x-3x^2}{x(x-2)} \leq 0$

A) $\varnothing$ B) $\{0\}$ C) $(-\infty; 0\rangle$ D) $\langle 0; \infty)$

E) jiná množina **max. 3 body**

1. $-x^2 \geq 0 \quad / +x^2$

$0 \geq x^2 \Rightarrow$ druhá mocnina má být záporná nebo nula, podmínku splňuje pouze číslo 0 (pro nenulová čísla je druhá mocnina kladná) $\Rightarrow K = \{0\}$, možnost B).

2. $3x \leq (-3)^2 - 3\cdot 3 = 9 - 9 = 0$

$3x \leq 0 \quad / :3$

$x \leq 0 \Rightarrow K = (-\infty; 0\rangle$, možnost C).

3. $\frac{6x-3x^2}{x(x-2)} \leq 0$, $x \neq 0; 2$

$\frac{3x(2-x)}{x(x-2)} = \frac{-3(x-2)}{(x-2)} = -3 \leq 0$, platí vždy $\Rightarrow K = R - \{0; 2\}$, možnost E)

Celkové řešení: 1B), 2C), 3E).

Matematika plus

Př. 8: V oboru R řeš: $\frac{x^2(x+2)}{x^4+4x^2}>0$. **max. 2 body**

$\frac{x^2(x+2)}{x^4+4x^2}=\frac{x^2(x+2)}{x^2(x^2+4)}=\frac{x+2}{x^2+4}>0$, $x\neq 0$

$\frac{x+2}{x^2+4}>0$, jmenovatel je vždy kladný $\Rightarrow$ řešíme pouze nerovnost $x+2>0$ $\Rightarrow$ $x>-2$

$K=(-2;\infty)-\{0\}=(-2;0)\cup(0;\infty)$

Př. 9: Která nerovnice má v oboru R tutéž množinu všech řešení jako nerovnice $x-2<0$?

A) $\frac{x-2}{-2}<0$ B) $\frac{x^2+2}{2-x}<0$ C) $\frac{x^2-4}{x+2}<0$

D) $\frac{x-3}{x^2-5x+6}<0$ E) $\frac{x-2}{x^2}<0$ **2 body**

$x-2<0$ $\Rightarrow$ $x<2$, $K=(-\infty;2)$

Procházíme jednotlivé možnosti.

A) $\frac{x-2}{-2}=-\frac{1}{2}(x-2)<0$, nerovnice $x-2<0$ vynásobená záporným číslem $\Rightarrow$ jiná množina řešení - $K=(2;\infty)$.

B) $\frac{x^2+2}{2-x}=(x^2+2)\frac{1}{-(x-2)}=-(x^2+2)\frac{1}{x-2}=<0$, výraz $-(x^2+2)$ je vždy záporný $\Rightarrow$ ekvivalentní s nerovnicí $-(x-2)<0$ $\Rightarrow$ jiná množina řešení - $K=(2;\infty)$ (bod A)).

C) $\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}=x-2<0$, $x\neq -2$: úpravou jsme sice získali nerovnici $x-2<0$ ze zadání, ale podmínka vylučuje z množiny řešení číslo -2 $\Rightarrow$ množina řešení ($(-\infty;-2)\cup(-2;2)$ se nerovná množině řešení nerovnice $x-2<0$.

D) $\frac{x-3}{x^2-5x+6}=\frac{x-3}{(x-3)(x-2)}=\frac{1}{x-2}<0$, $x\neq 3$, ekvivalentní s nerovnicí $x-2<0$, číslo 3 vyloučené podmínkou nepatří do množiny řešení $\Rightarrow$ $K=(-\infty;2)$, hledaná nerovnice je D).

Pro jistotu zkontrolujeme poslední možnost.

E) $\frac{x-2}{x^2}<0$, $x\neq 0$ $\Rightarrow$ z množiny řešení je vyloučeno číslo 0 $\Rightarrow$ množina řešení se nerovná množině řešení nerovnice $x-2<0$.

Správné řešení D).

Shrnutí: